代数的変形のもとで剛性を持つ擬Fuchs部分群

相馬, 輝彦

数理解析研究所講究録
967 巻 1996 年 83-91

代数的変形のもとで剛性を持つ擬Fuchs部分群

東京電機大学 理工学部　相 馬 輝 彦 (Teruhiko Soma)

この小論の目標は，藤井道彦氏（横浜市立大学理学部）との共同研究で得られた結果を紹介し，証明の概略を与えることにある．詳細は，Fujii-Soma [6] を参照してほしい．

ねじれ (torsion) を持たない有限生成群 G に対し，$R(G)$, $\overline{R}(G)$ でそれぞれ表現 $\rho : G \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ および $\overline{\rho} : G \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の代数的変形空間を表す．$R(G)$ は affine algebraic set の構造を持つことはよく知られている（例えば Culler-Shalen [5] 参照）．$\overline{\rho} : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を有限体積の双曲的 3 次元多様体 M のホロノミーとするとき，$\overline{\rho}$ のリフト $\rho : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は $R(\Pi_M)$ のただ一つの既約成分 $R_0(\Pi_M)$ に含まれる．以下では，自然な射影 $P : R(\Pi_M) \longrightarrow \overline{R}(\Pi_M)$ による $R_0(\Pi_M)$ の像 $\overline{R}_0(\Pi_M) = P(R_0(\Pi_M))$ を $\overline{\rho}$ の代数的変形空間と考えることにする．M の基本群 Π_M が，向き付け可能な種数 > 1 の閉曲面 S の基本群と同型な部分群 Π_S を含んでいると仮定する．$\overline{\rho}$ を $\overline{R}_0(\Pi_M)$ 内で移動させるとき，制限 $\overline{\tau} = \overline{\rho}|_{\Pi_S} \in \overline{R}(\Pi_S)$ もそれに連れて移動するかを考える．$\overline{\tau}$ が動かないとき，この表現は rigid であるという．正確に言えば，$\overline{\tau}$ が $\overline{R}_0(\Pi_M)$ において *rigid* であるとは，$i_S^*(\overline{R}_0(\Pi_M)) = \mathrm{conj}(\overline{\tau})$ であることを言う．ただし，$\mathrm{conj}(\overline{\tau})$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ において $\overline{\tau}$ と共役な表現からなる $\overline{R}(\Pi_S)$ の部分集合を表し，$i_S^* : \overline{R}(\Pi_M) \longrightarrow \overline{R}(\Pi_S)$ は包含写像 $i_S : \Pi_S \longrightarrow \Pi_M$ から誘導される連続写像とする．さらに，この $\overline{\tau}$ が M の中の incompressible 曲面 S のホロノミーのとき，S は $\overline{R}_0(\Pi_M)$ において rigid であるという．

任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset \overline{R}(\Pi_S)$ を，次の条件 (0.1), (0.2) を満たすような表現 $\overline{\tau} : \Pi_S \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ 全体からなる集合とする．

(0.1) $\overline{\tau}$ は忠実な，離散的拡張 $\overline{\rho}_M : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を許す．
(0.2) $M = \mathbf{H}^3/\overline{\rho}(\Pi_M)$ は n 個のカスプを持つ体積有限の双曲的多様体であり，$\overline{\tau}$ は $\overline{R}_0(\Pi_M)$ で rigid である．

$k \leq n$ をみたす任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$ が成り立つことに注意せよ（補題 1）．以下では，$F(S)$, $QF(S)$ によって，それぞれ Fuchs 表現，擬 Fuchs 表現全体からなる $\overline{R}(\Pi_S)$ の部分空間を表す．

次の定理により，$\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ の元 $\overline{\tau} : \Pi_S \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の部分群 $\overline{\tau}(\Pi_S)$ によって特徴付けられることが分かる．ただし，ε_0 は 3 次元の Margulis 定数とする．

定理 1. 次の (i), (ii) が成り立つ．
(i) $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ は $QF(S)$ の真部分集合である．

(ii) 忠実な表現$\tau : \Pi_S \longrightarrow PSL_2(\mathbf{C})$ が $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ の元であるための必要十分条件は，$\tau(\Pi_S)$ が次の条件 (ii-a), (ii-b) をみたす無限個の cocompact でねじれのない離散的拡張$\Lambda_1, \Lambda_2, ...,$ $\Lambda_m, ...$を持つことである．
(ii-a) $\sup_m\{\mathrm{vol}(\mathbf{H}^3/\Lambda_m)\} < \infty$.
(ii-b) $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$をみたすある$\varepsilon$に対し，各 $(\mathbf{H}^3/\Lambda_m)_{\mathrm{thin}(\varepsilon)}$は空であるかまたは連結である．

Cooper と Long [3] は $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S) = \emptyset$ であろうと予想していた．しかし，Neumann と Reid [9] は，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，rigid な全測地的曲面 Sを含む双曲的 3 次元多様体で n 個のカスプを持つものを構成した．すなわち，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \cap F(S) \neq \emptyset$ である．[9] で与えられた，Sはかなり限定された双曲的構造を持ったものである．次の定理は，$QF(S)$ のより一般的な表現であっても，$\mathrm{Rig}_n(S)$ の元になり得ることを示している．

定理 2. Sを種数 $g > 1$ の任意の向き付け可能な閉曲面とする．このとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ は $QF(S)$ で稠密であり，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \cap F(S)$ は $F(S)$ で稠密である．

系. Γを任意の cocompact な擬 Fuchs 群とする．このとき，Γの任意に小さい擬等角変形の中には，$\sup_m\{\mathrm{vol}(\mathbf{H}^3/\Lambda_m)\} < \infty$ をみたす，無限個の cocompact で，ねじれを持たない離散的拡張$\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m, ...$を許すものが存在する．

定理 2 の証明では，Brooks [2] と同様なサークル・パッキングの利用法により，カスプを持つ双曲的 3 次元多様体 Mで，rigid な曲面 Sを含むものが構成される．その構成法より，双曲的錐多様体が得られるような M上の双曲的 Dehn 手術のもとで Sが rigid であることは容易に検証できる．さらに，双曲的 Dehn 手術の変形が正則写像でパラメーター付けられるという事実を利用すれば，Sがいかなる Dehn 手術のもとでも rigid であることが証明できる．

§1. 準備

Ωを Riemann 球面$\hat{\mathbf{C}}$の真部分開集合（非連結でもよい）とし，$\tilde{\mathcal{C}}$をΩ内の円 C_iの集合とする．ただし，各 C_iはΩ内の円板Δ_iの境界となり，かつΔ_iは$\tilde{\mathcal{C}} - \{C_i\}$ 内のいかなる円も含まないと仮定する．さらに，$\tilde{\mathcal{C}}$は局所有限（すなわちΩ内の任意のコンパクト集合 Kは高々有限個の$\tilde{\mathcal{C}}$の元と交わる），かつ $C_i \cap C_j = \emptyset$ のとき，$\Delta_i \cup \Delta_j$の外側での C_iと C_jの交差角は$\pi/2$ 以下であると仮定する．このとき，もし$\tilde{\mathcal{C}}$の "nerves" の集合が，Ωのある三角形分割 $\mathcal{T}$の 1-骨格と一致するらなば，$\tilde{\mathcal{C}}$はΩ上のサークル・パターンと呼ばれる．$\mathcal{T}$の任意の三角形の頂点に対応する 3 円 $C_i, C_j, C_k \in \tilde{\mathcal{C}}$に直交する$\Omega$内の円 D_lが存在する（図 1.1 参照）．このような円全体の集合$\tilde{\mathcal{D}}$を，$\tilde{\mathcal{C}}$に直交する円の集合という．また，$\tilde{\mathcal{C}}$内の互いに交わるすべての 2 円の交差角が零のとき，$\tilde{\mathcal{C}}$をサークル・パッキングという．

Ωが擬 Fuchs 群Γの不連続領域$\Omega(\Gamma)$ と一致する場合を考える．もし，$\Omega(\Gamma)$ 内のサークル・パターン$\tilde{\mathcal{C}}$がΓ-不変なとき，等化写像 $p : \Omega(\Gamma) \longrightarrow \Omega(\Gamma)/\Gamma$による，$\tilde{\mathcal{C}}$の像 $\mathcal{C} = p(\tilde{\mathcal{C}})$ を 2 成分 Riemann 曲面$\Omega(\Gamma)/\Gamma$上のサークル・パターンという．サークル・パターン，パッキングに関する詳しいことは，松崎 [8] を参照せよ．

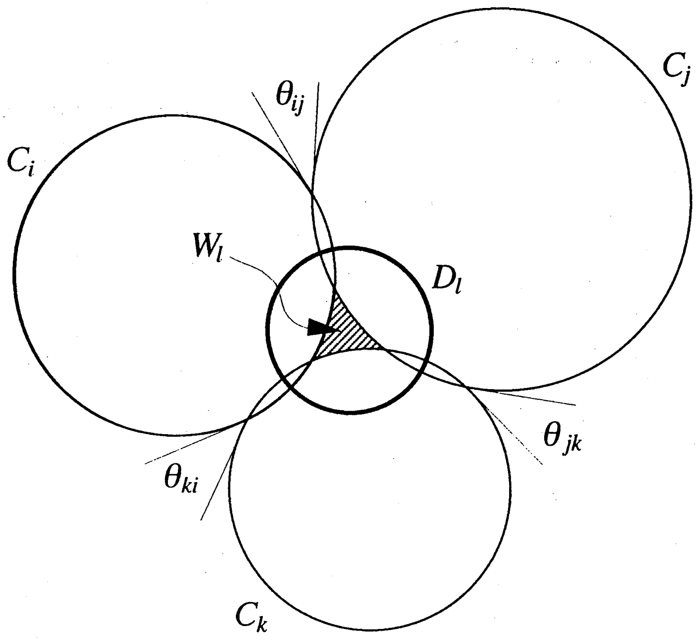

図 1.1

G を，離散表現$\overline{\rho}_0 : G \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を許す，ねじれを持たない有限生成群とする．また，$C(\overline{\rho}_0)$ を$\overline{\rho}_0$を含む$\overline{R}(G)$ の連結成分とする．Culler [4] の定理とホモトピー持ち上げ定理より，$C(\overline{\rho}_0)$ の任意の元$\overline{\rho}$はリフト$\rho : G \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ を持つ．したがって，$R(G)$ におけるρ_0の充分小さい開近傍 Oを取れば，自然な射影 $P : R(G) \longrightarrow \overline{R}(G)$ は Oを$\overline{\rho}_0$の近傍 $\overline{O} \subset \overline{R}_0(G)$ の上に同相に写す．さらに，$\mathbf{H}^3/\overline{\rho}_0(G)$ が有限体積のときは，Oは $R(G)$ のただ一つの既約成分 $R_0(G)$ に含まれると仮定できる（例えば Hodgson-Kerckhoff [7] を見よ）．特に，$\overline{R}_0(G) = P(R_0(G) \supset \overline{O}$である．

以下では，Sは常に種数 $g > 1$ の向き付け可能な閉曲面とする．

補題 1. (i) $k < n$ である，任意の $n, k \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$.
(ii) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset QF(S)$.

証明の概略 任意の$\overline{\tau} \in \mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ に対し，n 個のカスプを持つ有限体積の双曲的多様体 Mとπ_1-単射写像 $i_S : S \longrightarrow M$で，$i_S^*(\overline{R}_0(\Pi_M)) = \mathrm{conj}(\overline{\tau})$ をみたすものが存在する．

(i) Mの $n-k$個のカスプの Dehn 手術で得られた k個のカスプを持つ双曲的多様体を M' とする．このとき，$\overline{\tau}$は$\overline{R}_0(\Pi_{M'})$ において rigid である．すなわち，$\overline{\tau} \in \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$.

(ii) $\overline{\tau}$が rigid であることから，$\overline{\tau}(\Pi_S)$ が parabolic 元を持たないことが分かる．したがって，$\overline{\tau}(\Pi_S)$ が擬 Fuchs 群であることと，幾何的に有限な Klein 群であるということは同値である．もし，$\overline{\tau}(\Pi_S)$ が幾何的に無限であったならば，Thurston の被覆定理 [10, Theorem 9.2.2] や Bonahon [1] の定理より，Mの有限被覆$\widetilde{M}$で円周上の S-バンドルであるものが存在する．特に，$\widetilde{M}$はコンパクトであり，かつコンパクトでない多様体 Mを被覆しているこ

とになるが，これは矛盾である． □

§2. カスプを持つ双曲的多様体の構成

この節では，Sを rigid な曲面として含む，カスプを持つ双曲的多様体を構成し，定理 2 の証明の概略を与える．

Brooks [2] の定理 2 によると，任意の$\tau_0 \in QF(S)$と，その任意の開近傍$\mathcal{N}(\tau_0) \subset QF(S)$に対し，$\mathcal{N}(\tau_0)$に含まれる元$\tau$で，$\Omega(\Gamma)$が$\Gamma$-不変なサークル・パターンを持つものが存在する．ただし，$\Omega(\Gamma)$は擬 Fuchs 群$\Gamma = \tau(\Pi_S)$の不連続領域である．

Γに対する Klein 多様体$O(\Gamma) = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$を考える．等化写像$p : \mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma) \longrightarrow O(\Gamma)$は普遍被覆である．このとき，$\mathcal{C} = p(\tilde{\mathcal{C}})$は$\partial O(\Gamma) = p(\Omega(\Gamma))$上のサークル・パッキングである．$\{C_1, ..., C_m\}$を，$C_i$と$\cup(\mathcal{C} - \{C_i\})$の交点がちょうど 3 点$x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$であるような，$\mathcal{C}$の円全体の集合とし，$\mathcal{C} - \{C_1, ..., C_m\} = \{C_{m+1}, ..., C_{m+r}\}$とおく．もし必要ならば$\mathcal{C}$に新たに円を加えて，$\partial O(\Gamma)$上の新しいサークル・パッキングを考えることによって，任意に与えられた$n \in \mathbf{N}$に対し，$3m \geq n$と仮定できる．$\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_u\}$を$\mathcal{C}$に直行する$\partial O(\Gamma)$内の円全体からなる集合とする．$P_i$, Q_jを$\partial P_i = C_i$, $\partial Q_j = D_j$をみたすような，$\mathbf{H}^3/\Gamma$内の全測地的平面とする．$\mathbf{H}^3/\Gamma - (\cup_{i=1}^m P_i) \cup (\cup_{j=1}^u Q_j)$の連結成分で，$\mathbf{H}^3/\Gamma$の凸コアを含むようなものの$\mathbf{H}^3/\Gamma$における閉包を$N$とする．包含写像$N \subset \mathbf{H}^3/\Gamma$はホモトピー同値写像でるから，埋め込み$i_S : S \longrightarrow N$で$\pi_1(i_S) = \tau$をみたすものが存在する．$N$の境界$\partial N$は仮想頂点を持つ全測地的多面体$A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_u$からなる．ただし，$A_i = P_i \cap \partial N$, $B_j = Q_j \cap \partial N$である．$A_i \cap B_j \neq \emptyset$のとき，$A_i$と$B_j$は直交する．$N$を基底空間，$\partial N$を特異焦点集合とするような，双曲的軌道体を考える．このとき，4-重軌道体被覆$q : M \longrightarrow N$で，Mはカスプを持つ有限体積の双曲的多様体になり，かつ被覆変換群が$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$に同型なものが存在する．さらに，この変換群は$\mathrm{Fix}(\alpha) = q^{-1}(\cup_{i=1}^m A_i)$, $\mathrm{Fix}(\beta) = q^{-1}(\cup_{j=1}^u B_j)$をみたす等長写像$\alpha, \beta : M \longrightarrow M$で生成される（図 2.1 参照）．$N$内の$S$は，$M$上の曲面（これも$S$で表す）にリフトできる．$\partial O(\Gamma)$上の点$x_{i\gamma}$ $(i = 1, ..., m; \gamma = 1, ..., 3)$に対応する$M$の$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$-カスプを$\delta(x_{i\gamma})$で表し，その他の$M$のカスプを$\delta(y_k)$ $(k = 1, ..., l)$で表すとこにする．階数 2 の自由アーベル群$\pi_1(\delta(x_{i\gamma}))$の生成元のうち，$\mathrm{Fix}(\alpha)$とのみ交わり$\mathrm{Fix}(\beta)$とは交わらないループで定義されるものを$\mu_{i\gamma}$で表す．同様にして定義される$\pi_1(\delta(y_k))$の生成元を$\nu_k$で表す．

ここで，Mのホロノミーのリフト$\rho_\infty : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$を含む代数的多様体$R_0(\Pi_M)$について復習する．まず，$\sigma_{i\gamma}, \sigma_k \in \{-1, 1\}$を，$\sigma_{i\gamma}\mathrm{tr}(\rho_\infty(\mu_{i\gamma})) = 2$, $\sigma_k \mathrm{tr}(\rho_\infty(\mu_k)) = 2$をみたす定数とする．このとき，

$$\eta(\rho) = (2 - \sigma_{11}\mathrm{tr}(\rho(\mu_{11})), ..., 2 - \sigma_{m3}\mathrm{tr}(\rho(\mu_{m3})), 2 - \sigma_1 \mathrm{tr}(\rho(\nu_1)), ..., 2 - \sigma_l \mathrm{tr}(\rho(\nu_l)))$$

で定義される正則写像$\eta : R(\Pi_M) \longrightarrow \mathbf{C}^{3m+l}$を考える．よく知られているように，$R(\Pi_M)$における$\rho_\infty$の連結開近傍$O_\infty$で，次元が$3m + l + 3$の（滑らかな）複素多様体であるものが存在する．特に，O_∞は，ただ一つの既約成分$R_0(\Pi_M)$に含まれる．さらに，制限写像$\eta|_{O_\infty}$はしずめ込みであり，$\eta^{-1}(\eta(\rho)) \cap O_\infty = \mathrm{conj}(\rho) \cap O_\infty$をみたす（例えば，[7] の第 4 節を参照）．

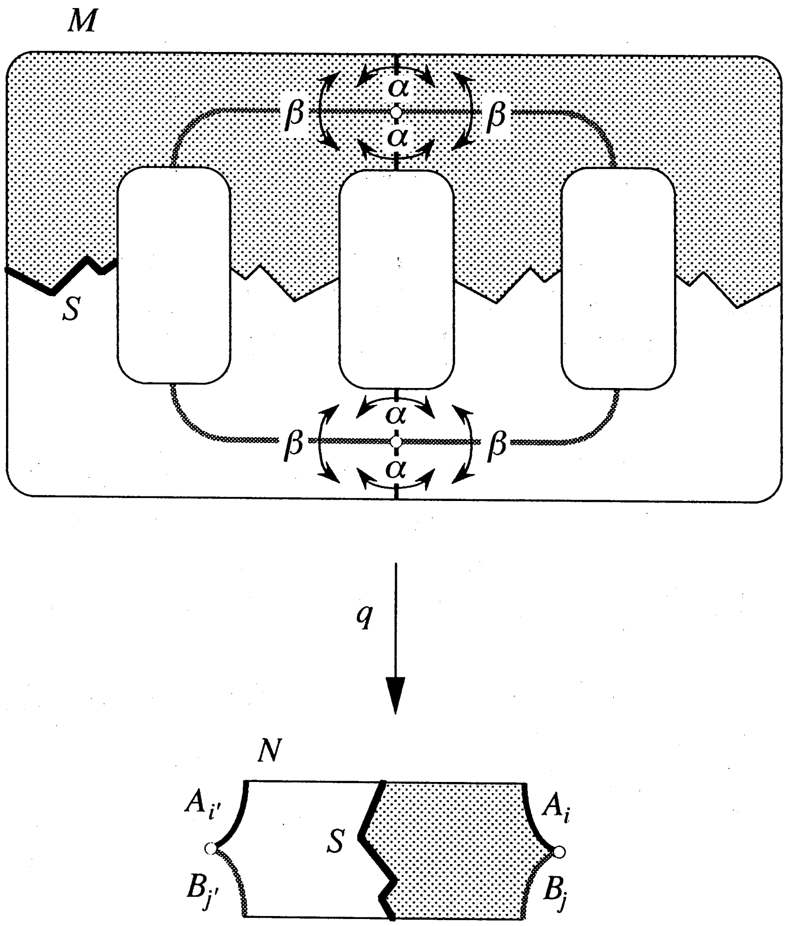

図 2.1

有限生成群 G に対して，$X(G)$ を Culler-Shalen [5, §1] で定義されているような，$R(G)$ の元のキャラクター全体からなる集合とする．[5] で示されているように，$X(G)$ はアフィン代数的集合であり，自然な射影 $t : R(G) \longrightarrow X(G)$ は正則写像である．$X_0(\Pi_M)$ を $t(R_0(\Pi_M))$ を含むような $X(G)$ の既約成分とする．$\eta|_{O_\infty}$はしずめ込みでるから，ρ_∞を含む O_∞内の $(3m+l)$ 次元連結多様体 W_∞が存在して，制限$\eta_0 = \eta|_{W_\infty} : W_\infty \longrightarrow \mathbf{C}^{3m+l}$は原点 $(0, ..., 0) \in \mathbf{C}^{3m+l}$の開近傍 V_0上への双正則写像となる．ここで，正則写像

$$\omega : V_0 \xrightarrow{\eta_0^{-1}} W_\infty \subset R_0(\Pi_M) \xrightarrow{t_M} X_0(\Pi_M)$$

を考える．このとき，$U_\infty = \omega(V_0)$ が $X_0(\Pi_M)$ における $t_M(\rho_\infty)$ の開近傍であることが容易に示せる．$i_S^* : X_0(\Pi_M) \longrightarrow X(\Pi_S)$ を包含写像 $i_S : S \longrightarrow M$から誘導される正則写像とすると，次のような可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccc} V_0 & \xrightarrow{\eta_0^{-1}} & R_0(\Pi_M) & \xrightarrow{i_S^*} & R(\Pi_S) \\ \omega\downarrow & & \downarrow t_M & & \downarrow t_S \\ U_\infty & \subset & X_0(\Pi_M) & \xrightarrow{i_S^*} & X(\Pi_S) \end{array}$$

V_0を充分小さくとれば，任意の $\mathbf{t} \in V_0 \cap \mathbf{R}_+^{3m+l}$に対し，$\eta_0^{-1}(\mathbf{t})$ は Mから双曲的 Dehn 手術で得られる双曲的錐多様体のホロノミーのリフトとして実現できる．次の補題では，$\mathbf{z} = (z_{11}, ..., z_{m3}, w_1, ..., w_l) \in V_0$とおくとき，$i_S^* \circ \omega$が変数 $z_{11}, ..., z_{m3}$に関して不変であることが示される．

補題 2. Mを上で与えた $(3m + l)$ 個のカスプを持つ双曲的多様体とする．このとき，$\delta(y_1), ..., \delta(y_l)$ に沿っての双曲的 Dehn 手術によって，Mから得られる $3m$ 個のカスプを持つ双曲的多様体$\widehat{M}$に対し，$\widehat{\tau} = \widehat{\rho} \circ \widehat{i}_{S*} : \Pi_S \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は $R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で rigid である．ただし，$\widehat{i}_S : S \longrightarrow \widehat{M}$は包含写像，$\widehat{\rho} : \Pi_{\widehat{M}} \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は$\widehat{M}$のホロノミーのリフトである．

補題 2 は，$P(\widehat{\tau}) \in \mathrm{Rig}_{3m}(\Pi_S)$ を示している．この Dehn 手術の係数を充分大きくとれば，$P(\widehat{\tau})$ は $P(\tau) = \overline{\tau}$に任意に近接させられる．したがって，$P(\widehat{\tau})$ は $\mathcal{N}(\overline{\tau}_0) \cap \mathrm{Rig}_{3m}(\Pi_S) \subset \mathcal{N}(\overline{\tau}_0) \cap \mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ の元である．したがって，$\mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ は $QF(S)$ で稠密である．これは，定理 2 の前半部分である．後半部分の証明のためには，[2] の定理 3 を利用して，Sが全測地的部分曲面になるように，Mを構成すればよい（詳細は [6] を参照せよ）．

補題 2 の証明の概略 $a_1, ..., a_l \in \mathbf{N}$ を自然数の任意の l組で，$t_k = 2 - 2\cos(\pi/a_k)$ $(k = 1, ..., l)$ に対して，$\mathbf{t}' = (0, ..., 0, t_1, ..., t_l)$ が V_0に含まれるようなものとする．このとき，$\rho' = \eta_0^{-1}(\mathbf{t}')$ は $3m$ 個のカスプを持つ 3 次元双曲的軌道体のホロノミーのリフトである．Mostow の剛体性定理より，M上の $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$作用は，$M'$上の等長的作用に拡張される．$q : M' \longrightarrow N' = M'/\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$を，この作用による等化写像とする．このとき，$N'$を軌道体の基底空間というよりは，区分的に全測地的な境界$\partial N'$を持つ双曲的多様体とみなす．A_i, B_jに対応する，$\partial N'$内の全測地的多面体を A_i', B_j'で表す．$A_{i_1}' \cap A_{i_2}' \neq \emptyset$ であって，それが M'の特異焦点集合の k番目の成分に対応するとき，N'において A_{i_1}' と A_{i_2}'の作る角度はπ/a_kである．また，$A_i' \cap B_j' \neq \emptyset$であれば，これらの多面体は直交する．$\tau' = \rho' \circ i_{S*} : \Pi_S \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, $\Gamma' = P(\tau')(\Pi_S) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ とおく．また，Klein 多様体 $O(\Gamma') = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma'))/\Gamma'$を考える．$P_i'$を $P_i' \cap \partial N' = A_i'$をみたすような，$\mathbf{H}^3/\Gamma'$内の全測地的平面とする．このとき，$O(\Gamma')$ における境界 $C_i' = \partial P_i'$ $(i = 1, ..., m + r)$ は，$\partial O(\Gamma')$ 上のサークル・パッキング $\mathcal{C}'$を定義する．$\mathcal{C}'$の nerves の集合は，$\mathcal{C}$の nerves の集合と同じ組合せ型を持つ．$1 \le i \le 3m$ に対して，C_i'と $\cup(\mathcal{C}' - \{C_i'\})$ の交点は 3 点 $x_{11}', x_{i2}', x_{i3}'$からなる．$C_{i\gamma}'$を $C_i' \cap C_{i\gamma}' = \{x_{i\gamma}'\}$ となる $\mathcal{C}'$の元とする，図 2.2 (a) 参照．充分小さい $s_{i\gamma} > 0$ $(i = 1, ..., m, \gamma = 1, 2, 3)$ に対して，$\partial O(\Gamma')$ 内の円 C_i''で $C_{i\gamma}'$との交差角が$\theta_{i\gamma} = \arccos(1 - s_{i\gamma}/2)$ であるものが存在する（図 2.2 (b) 参照）．

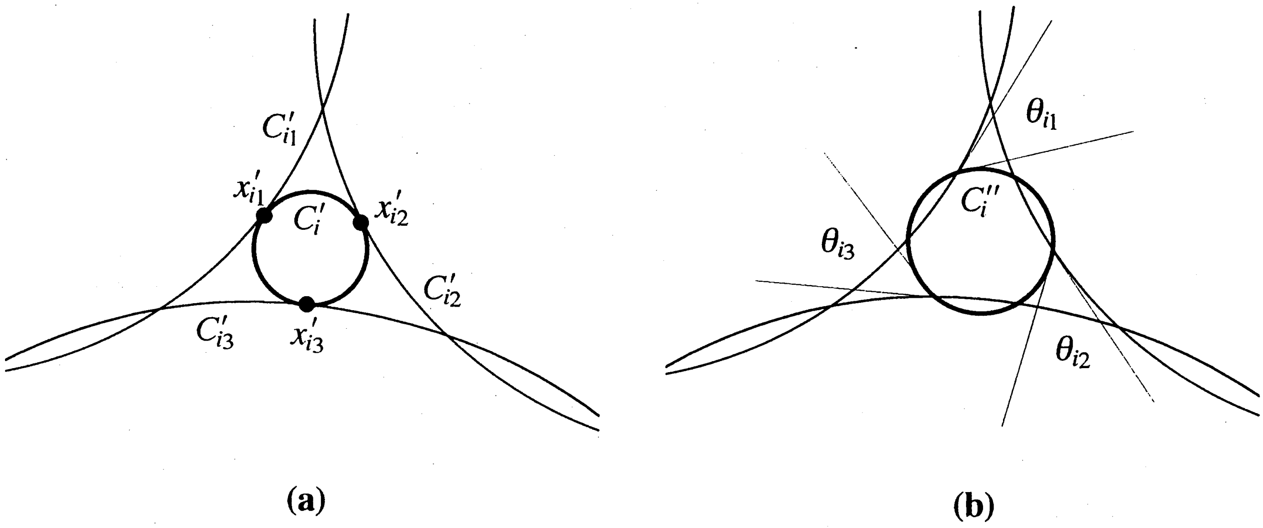

図 2.2

ここで，新しいサークル・パターン

$$\mathcal{C}'' = \{C''_1, ..., C''_m\} \cup \{C'_{m+1}, ..., C'_{m+r}\}$$

を考える．$\mathcal{D}'' = \{D''_1, ..., D''_u\}$ を $\mathcal{C}''$に直行する$\partial O(\Gamma')$ 内の円全体の集合とする．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$からMを構成したのと同様に，$\mathcal{C}'', \mathcal{D}''$から双曲的錐多様体 M''が得られる．以上の構成を順に並べると，

$$\mathcal{C} \Longrightarrow N \Longrightarrow M \Longrightarrow M' \Longrightarrow N' \Longrightarrow \mathcal{C}' \Longrightarrow \mathcal{C}'' \Longrightarrow N'' \Longrightarrow M''$$

となる．各$\theta_{i\gamma}$は充分小さく取ってあるので，M''はM'から双曲的Dehn手術で得られる．したがって，M''のホロノミーのリフト$\rho'' : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ で，$\eta_0(\rho'') = (s_{11}, ..., s_{m3}, t_1, ..., t_l)$ をみたすものが存在する．Γ'を動かすことなく，$\mathcal{C}'$から $\mathcal{C}''$への置き換えがなされたので，$\tau'' = \rho'' \circ i_{S*}$は $R(\Pi_S)$ においてτ'に共役である．これは，$(0, ..., 0) \in \mathbf{C}^{3m}$の充分小さな開近傍 V'_0に対し，$i^*_S \circ \omega' : V'_0 \longrightarrow X(\Pi_S)$ が定値写像であることを意味する．ただし，$\omega' : V'_0 \longrightarrow X_0(\Pi_M)$ は

$$\omega'(z_{11}, ..., z_{3m}) = \omega(z_{11}, ..., z_{m3}, t_1, ..., t_l)$$

で定義される写像とする．$i^*_S \circ \omega'$は正則写像であるから，一致の定理より $i^*_S \circ \omega'$は V'_0で定値である．$a_1, .., a_l \in \mathbf{N}$ が任意に選べること，および $\lim_{a_k \to \infty} t_k = 0$ であることより，再び一致の定理より $i^*_S \circ \omega : V_0 \longrightarrow X(\Pi_S)$ が変数 $z_{11}, ..., z_{m3}$に関して定値であることが分かる．

$\eta_0^{-1}(\hat{\mathrm{w}}) \in R_0(\Pi_M)$ が双曲的多様体$\widehat{M}$のホロノミーのリフト$\hat{\rho} : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ であるような点$\hat{\mathrm{w}} = (0, .., 0, \hat{w}_1, .., \hat{w}_l) \in V_0$を取る．$\widehat{M}$のホロノミーのリフト$\hat{\rho} : \Pi_{\widehat{M}} \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \in R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で $t_M \circ j^*_{\widehat{M}}(\hat{\rho}) = \omega(\hat{\mathrm{w}})$ をみたすものが存在する．ただし，$j_{\widehat{M}} : M \longrightarrow \widehat{M}$ は包含写像である．$j^*_{\widehat{M}} : X_0(\Pi_{\widehat{M}}) \longrightarrow X_0(\Pi_M)$ は正則（したがって特に連続）写像であるか

ら，$t_{\widehat{M}}(\hat{\rho})$ の $X_0(\Pi_{\widehat{M}})$ における連結な開近傍$\widehat{U}_\infty$で $j^*_{\widehat{M}}(\widehat{U}_\infty) \subset U_\infty$をみたすものが存在する．$\hat{w}_1,\dots,\hat{w}_l$を固定したとき，$i^*_S \circ \omega$は $z_{11},\dots,z_{m3}$に関して定値であるから，$j^*_{\widehat{M}}(\widehat{U}_\infty)$ の任意の元は$\omega(z_{11},\dots,z_{m3},\hat{w}_1,\dots,\hat{w}_l) = \omega(0,\dots,0,\hat{w}_1,\dots,\hat{w}_l) = \omega(\hat{\mathbf{w}})$ と表される．したがって，

$$\begin{aligned}\widehat{i}^*_S(\widehat{U}_\infty) &= i^*_S(j^*_{\widehat{M}}(\widehat{U}_\infty)) = \{i^*_S(\omega(\hat{\mathbf{w}}))\} = \{i^*_S(t_M \circ j^*_{\widehat{M}}(\hat{\rho}))\} = \{i^*_S(j^*_{\widehat{M}} \circ t_{\widehat{M}}(\hat{\rho}))\} \\ &= \{\widehat{i}^*_S(t_{\widehat{M}}(\hat{\rho}))\} = \{t_S(\widehat{i}^*_S(\hat{\rho}))\} = \{t_S(\hat{\tau})\}.\end{aligned}$$

ただし，$\widehat{i}^*_S : X_0(\Pi_{\widehat{M}}) \longrightarrow X(\Pi_S)$ は包含写像$\widehat{i}_S : S \longrightarrow \widehat{M}$から誘導される正則写像である．$\widehat{i}^*_S$は $t_{\widehat{M}}(\hat{\rho})$ の近傍$\widehat{U}_\infty$上で定値であるから，$\widehat{i}^*_S$は $X_0(\Pi_{\widehat{M}})$ 上でも定値である．したがって，

$$t_S(\widehat{i}^*_S(R_0(\Pi_{\widehat{M}}))) = \widehat{i}^*_S(t_{\widehat{M}}(R_0(\Pi_{\widehat{M}}))) \subset \widehat{i}^*_S(X_0(\Pi_{\widehat{M}})) = \{t_S(\hat{\tau})\}$$

が成り立つ．すなわち，$\widehat{i}^*_S(R_0(\Pi_{\widehat{M}})) \subset t_S^{-1}(\hat{\tau}) = \mathrm{conj}(\hat{\tau})$ である．以上で，$\hat{\tau}$が $R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で rigid であることが証明された． □

§3. 定理 1 の証明の概略

補題 1 (ii) より，$\mathrm{Rig}_1(\Pi_S) \subset QF(S)$ である．容易に分かるように，$\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)/\mathrm{conj}$ は可算集合である．一方，等化空間 $QF(S)/\mathrm{conj}$ は $\mathbf{R}^{12(g-1)}$に同相でるから，$\mathrm{Rig}_1(\Pi_S) \neq QF(S)$ が成り立つ．以上で，定理 1 (i) が証明できた．

定理 1 (ii) の証明の概略 必要条件の証明は，双曲的 Dehn 手術定理 [10, Thoerem 5.9] より自明なので，ここでは十分条件の証明の概略を述べる．

$M_m = \mathbf{H}^3/\Lambda_m$, $M_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$（ただし，$\Gamma = \overline{\tau}(\Pi_S)$）とおく．相異なる$\Lambda_m$が共通の部分群$\Gamma$を持つことより，必要ならば $\{\Lambda_m\}$ のある無限部分集合を考えることにより，$\{\Lambda_m\}$ の各元は互いに $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ で共役ではないと仮定できる．$i : S \longrightarrow M_\Gamma$を$\pi_1(i) = \overline{\tau}$をみたす滑らかな埋め込みとする．$\Lambda_m$は$\Gamma$を含むので，局所等長的被覆 $q_m : M_\Gamma \longrightarrow M_m$が存在する．$S_m = q_m(i(S))$ の直径は有界なので，εより充分小さい$\delta > 0$ を取れば，任意の m に対して，$S_m \subset (M_m)_{\mathrm{thick}(\delta)}$となる．$\sup_m\{\mathrm{vol}(M_m)\} < \infty$ であり，かつ $(M_m)_{\mathrm{thin}(\delta)}$は 2 成分以上を持つことはないので，$\{\Lambda_m\}$ の無限部分列 $\{\Lambda_r\}$ と，1 個のカスプを持つ有限体積の双曲的多様体 M，および $\lim_{r\to\infty} K_r = 1$ をみたす K_r-擬等長写像$\varphi_r : (M_r)_{\mathrm{thick}(\delta)} \longrightarrow M_{\mathrm{thick}(\delta)}$ が存在する（例えば，[10, §5.11] 参照）．$(\varphi_r)_* = \mathrm{id}_{\Pi_M}$となるように，$\pi_1((M_r)_{\mathrm{thick}(\delta)})$ と $\pi_1(M_{\mathrm{thick}(\delta)}) = \Pi_M$を同一視する．このとき，$(M_r)_{\mathrm{thick}(\delta)}$のホロノミー$\overline{\rho}_r : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ を適当に取ることによって，$\{\overline{\rho}_r\}$ が$\overline{R}(\Pi_M)$ において Mのホロノミー$\overline{\rho}_\infty$に収束するようにできる．Ascoli-Arzelà の定理より，$\{\Lambda_r\}$ の無限部分列 $\{\Lambda_u\}$ が存在し，$\varphi_u \circ (q_u \circ i)$ が $M_{\mathrm{thick}(\delta)} \subset M$において互いにホモトピックであるようにできる．よって，Π_SとΠ_Mの部分群 $(\varphi_u \circ (q_u \circ i))_*(\Pi_S) = (q_u \circ i)_*(\Pi_S)$ との同一視は，u の選び方に依存しない．したがって，$\{\overline{\rho}_u|_{\Pi_S}\}$ は$\overline{R}(\Pi_S)$ において$\overline{\rho}_\infty|_{\Pi_S}$に収束する．各$\overline{\rho}_r|_{\Pi_S}$は $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ において$\overline{\tau}$に共役であるから，$\overline{\rho}_\infty|_{\Pi_S}$もまた$\overline{\tau}$に共役である．

$\mu \in \Pi_M$を Mの $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$-カスプの基本群を生成する元の一つとする．§2 と同様に，$0 \in \mathbf{C}$ の開近傍 V_0と正則写像$\omega : V_0 \longrightarrow X_0(\Pi_M)$ が存在して，$\omega(z) = t_M(\rho)$ となる．ただし，$\rho : \Pi_M \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は，定数$\sigma = 2/\mathrm{tr}(\rho_\infty(\mu))$ に対し，$z = 2 - \sigma\mathrm{tr}(\rho(\mu))$ をみたす表現で

ある．$i_S : S \longrightarrow M$は$\pi_1$-単射写像で，$i_{S*} : \Pi_S \longrightarrow \Pi_S \subset \Pi_M$が恒等写像になるものとする．充分大きな全ての$u$と，$\overline{\rho}_u$のあるリフト$\rho_u : \Pi_S \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$に対して，$\omega(z_u) = t_M(\rho_u)$をみたす$z_n \in V_0$が存在する．$\overline{\tau}$のあるリフト$\tau$に対して，$i_S^* \circ \omega(z_u) = t_S(\tau)$であり，かつ$\lim_{u\to\infty} z_u = 0$であるから，一致の定理より$i_S^* \circ \omega$は$V_0$上で定値である．したがって，補題2と同様な議論によって，$P(\tau) = \overline{\tau} \in \mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$が成り立つ．　□

参考文献

1. F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. **124** (1986), 71-158.
2. R. Brooks, Circle packings and co-compact extensions of Kleinian groups, Invent. Math. **86** (1986), 461-469.
3. D. Cooper and D. Long, An undetected slope in a knot manifold, In: Topology '90, Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University, pp. 111-121, de Gruyter, Berlin New York 1991.
4. M. Culler, Lifting representations to covering groups, Advances in Math. **59** (1986), 64-70.
5. M. Culler and P. Shalen, Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, Ann. of Math. **117** (1983), 109-146.
6. M. Fujii and T. Soma, Rigid quasi-Fuchsian subgroups in algebraic deformations, Preprint.
7. C. Hodgson and S. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, Preprint.
8. 松崎克彦（他），Circle Packingの幾何学，数理解析研究所講究録 **893**, 1995.
9. W. Neumann and A. Reid, Rigidity of cusps in deformations of hyperbolic 3-orbifolds, Math. Ann. **295** (1993), 223-237.
10. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lect. Notes, Princeton Univ., 1978.